- Tutorial
- Exercícios
- Apostila

2. Funções Matemáticas e Estatísticas

O R como uma Calculadora Fora do Comum

Operações Aritméticas Básicas

A linha de comando do R funciona como uma calculadora. As principais operações aritméticas e funções matemáticas estão disponíveis. Exemplo:

```
> 4 + 9
[1] 13
> 4 - 5
[1] -1
> 4 * 5
[1] 20
> 4 / 5
[1] 0.8
> 4^5
[1] 1024
>
```

A notação básica de operações algébricas, como a aplicação hierárquica de parênteses, também pode ser utilizada:

```
> (4 + 5 ) * 7 - (36/18)^3
[1] 55
> (2 * ( 2 * ( 2 * (3-4))))
[1] -8
>
```

Note que somente os parênteses podem ser utilizados nas expressões matemáticas. As chaves (“{}”) e os colchetes (“[]”) têm outras funções no R:

```
> (2 * { 2 * [ 2 * (3-4)]})
Error: syntax error in "(2 * { 2 * ["
>
```

Por que o R é uma calculadora **fora do comum** ? Experimente fazer a seguinte operação matemática na sua calculadora:

```
> 1 - (1 + 10^(-15))
```

Funções Matemáticas Comuns

As funções matemáticas comuns também estão disponíveis e podem ser aplicadas diretamente na linha de comando:

```
> sqrt(9)   # Raiz Quadrada
[1] 3
> abs( - 1 )  # Módulo ou valor absoluto
[1] 1
> abs( 1 )
[1] 1
> log( 10 )   # Logaritmo natural ou neperiano
[1] 2.302585
> log( 10, base = 10) # Logaritmo base 10
[1] 1
> log10(10)   # Também logaritmo de base 10
[1] 1
> log( 10, base = 3.4076) # Logaritmo base 3.4076
[1] 1.878116
> exp( 1 )       # Exponencial
[1] 2.718282
>
```

As funções trigonométricas:

```
> sin(0.5*pi)    # Seno
[1] 1
> cos(2*pi)      # Cosseno
[1] 1
> tan(pi)        # Tangente
[1] -1.224647e-16
>
> asin(1)       # Arco seno (em radianos)
[1] 1.570796
> asin(1) / pi * 180
[1] 90
>
> acos(0)      # Arco cosseno (em radianos)
[1] 1.570796
> acos(0) / pi * 180
[1] 90
> atan(0)    # Arco tangente (em radianos)
[1] 0
> atan(0) / pi * 180
[1] 0
>
```

Funções para arredondamento:

```
> ceiling( 4.3478 )
```

```
[1] 5
> floor( 4.3478 )
[1] 4
> round( 4.3478 )
[1] 4
> round( 4.3478 , digits=3)
[1] 4.348
> round( 4.3478 , digits=2)
[1] 4.35
>
```

Funções matemáticas de especial interesse estatístico:

```
> factorial( 4 )          # Fatorial de 4
[1] 24
> choose(10, 3)           # Coeficientes binomiais: combinação de 10 3-a-3
[1] 120
> gamma(1.2)              # Função gamma
[1] 0.9181687
>
```

Criando Variáveis com Atribuição

Mais do que simples operações aritméticas, o R permite que executemos operações **algébricas** operando sobre variáveis pré-definidas.

Para definir uma variável, basta escolher um nome (*lembre-se das regras de nomes no R*) e atribuir a ela um valor:

```
> a = 3.6
> b = sqrt( 35 )
> c = -2.1
> a
[1] 3.6
> b
[1] 5.91608
> c
[1] -2.1
>
> a * b / c
[1] -10.14185
> b^c
[1] 0.02391820
> a + exp(c) - log(b)
[1] 1.944782
>
> a - b * c / d
Error: object "d" not found
```

Não esqueça de definir as variáveis previamente!!

Exercícios

Exercício 2.1. ***Estimador de Pollard***

Pollard (1971) propôs o seguinte estimador para estimar a densidade no método de quadrantes:

$$\hat{N} = \frac{4(4n-1)}{\pi \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^4 r_{ij}^2} $$

onde, r_{ij} é a distância de árvore do quadrante j no ponto i ao centro do ponto quadrante e n é o número de pontos quadrantes.

A variância desse estimador é:

$$Var(\hat{N_p}) = \frac{\hat{N_p}}{4n-2}$$

Imagine que foram amostrados 30 quadrantes, e que o valor da soma do quadrado das distâncias de cada árvore ao centro de seu quadrante foi de:

$$\sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^4 r_{ij}^2 = 2531,794$$

1. Qual a densidade estimada?
2. Qual a variância?

Exercício 2.2. ***Área transversal de uma Árvore***

A área transversal de uma árvore é calculada assumindo que a secção transversal do tronco à altura do peito (1,3m) é perfeitamente circular. Se o diâmetro à altura do peito (DAP) de uma árvore for 13.5cm, qual a área transversal?

Exercício 2.3. ***Área transversal de uma Árvore (Revisitado)***

Se uma árvore possui três fustes com DAPs de: 7cm, 9cm e 12cm, qual a sua área transversal de cada fuste?

Exercício 2.4. ***Cálculo da Biomassa de Árvores do Cerrado***

O modelo alométrico de biomassa ajustado para árvores do Cerradão estabelece que a biomassa é dada pela expressão:

$$\hat{b} = e^{-1,7953} d^{2.2974}$$

onde b é a biomassa em *kg* e d é o DAP em *cm*.

Já um outro modelo para biomassa das árvores na mesma situação tem a forma:

$$\hat{ln(b)} = -2.6464 + 1,996ln(d) + 0,7558ln(h)$$

onde h é a altura das árvores em *m*.

Para uma árvore com DAP de 15*cm* e altura de 12*m*, os modelos resultarão em estimativas muito distintas?

Mantendo a Coerência Lógica-Matemática

O R também lida com operações matemáticas que envolvem **elementos infinitos** e **elementos indeterminados**:

```
> 1/0
[1] Inf
> -5/0
[1] -Inf
> 500000000000000000/Inf
[1] 0
> 0/0
[1] NaN
> Inf/Inf
[1] NaN
> log(0)
[1] -Inf
> exp(-Inf)
[1] 0
> sqrt(Inf)
[1] Inf
> sqrt(-1)
[1] NaN
Warning message:
NaNs produced in: sqrt(-1)
> 2 * NA
[1] NA
> 2 * NaN
[1] NaN
> NA / 10
[1] NA
> NaN / -1
[1] NaN
```

Note que determinadas **palavras** (além do nome das funções) estão reservadas no R, pois são utilizadas com significado especial:

- `pi` - constante pi = 3.141593 ;
- `Inf` - infinito;
- `NaN` - indeterminado (Not a Number), normalmente resultado de uma operação matemática indeterminada;
- `NA` - indeterminado (Not Available), normalmente caracterizando uma observação perdida ou faltante (*missing value*).

Na operações matemáticas, `NaN` e `NA` atuam sempre como **indeterminado**.

Exercícios

2.5. Exercício Conceitual: *Criando Variáveis com Nomes Reservados*

O que acontece se você criar uma variável com o nome `pi`? Por exemplo,

```
> pi = 10
```

O que acontece com a constante *pi*?

E se for criada uma constante de nome `sqrt`? O que acontece com a função raiz quadrada (`sqrt()`)?

DICA: O que faz a função `search`, no comando:

```
> search()
```

2.6. Exercício Conceitual: *O que é uma Observação Perdida*

Como se caracteriza uma **observação perdida**?

Quando o diâmetro de uma árvore deve ter o valor **zero** ou o valor **NA**?

E o peso de um animal? E a biomassa de uma floresta? E a espécie de uma ave?

O R como uma Calculadora Vetorial

Criação de Vetores

O R, e a linguagem S, foram criados para operar não apenas *número-a-número* como uma calculadora convencional.

O R é um ambiente **vetorial**, isto é, quase todas suas operações atuam sobre um *conjunto de valores*, que genericamente chamaremos de vetores[1)].

Uma definição mais detalhada dos vetores está na seção sobre manipulação de dados. Aqui fornecemos apenas algumas definições e funções importantes para compreender as operações numéricas com vetores.

Concatenação de Elementos em um Vetor: a Função "c"

Para criar um vetor, podemos usar a função c (c = concatenar). Essa função simplesmente junta todos os argumentos dados a ela, formando um vetor:

```
> a = c(1, 10, 3.4, pi, pi/4, exp(-1), log( 2.23 ), sin(pi/7) )
> a
[1]  1.0000000 10.0000000  3.4000000  3.1415927  0.7853982  0.3678794
0.8020016  0.4338837
>
```

Criação de Sequências: Operador ":" e Função "seq"

Para criar vetores de números com intervalo fixo unitário (intervalo de 1) se utiliza o *operador sequencial* (`:`):

```
> b = 1:8
> b
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8
> c = 20:32
> c
 [1] 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32
> d = 2.5:10
> d
[1] 2.5 3.5 4.5 5.5 6.5 7.5 8.5 9.5
```

Uma forma mais flexível de criar sequências de números (inteiros ou reais) é usando a função `seq`:

```
> seq(10, 30)
 [1] 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
> seq(10, 30, by=2)
 [1] 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30
> seq(1.5, 7.9, length=20)
 [1] 1.500000 1.836842 2.173684 2.510526 2.847368 3.184211 3.521053 3.857895
 [9] 4.194737 4.531579 4.868421 5.205263 5.542105 5.878947 6.215789 6.552632
[17] 6.889474 7.226316 7.563158 7.900000
```

Vetores de Valores Repetidos: Função "rep"

Também é fácil criar uma sequência de números repetidos utilizando a função `rep`:

```
> rep(5, 3)
[1] 5 5 5
> rep(1:5, 3)
 [1] 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5
> rep(1:5,each=3)
 [1] 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5
>
```

Exercícios

Exercício 2.7. *Palmeira com Muitos Fustes I*

Uma palmeira perfilhada possui 10 fustes com os seguintes diâmetros: 5, 6, 7, 5, 10, 11, 6, 8, 9 e 7.

Crie um vetor dap com os diâmetros acima e uma sequência que enumera os fustes.

Vetores: Operações Matemáticas

Todas operações matemáticas aplicadas sobre um vetor, serão aplicadas sobre cada elemento desse vetor:

```
> 2 * a
[1]  2.0000000 20.0000000  6.8000000  6.2831853  1.5707963  0.7357589
1.6040032
[8]  0.8677675
> sqrt( a )
[1] 1.0000000 3.1622777 1.8439089 1.7724539 0.8862269 0.6065307 0.8955454
[8] 0.6586985
>
> log( a )
[1]  0.0000000  2.3025851  1.2237754  1.1447299 -0.2415645 -1.0000000
-0.2206447
[8] -0.8349787
>
```

Se as variáveis que trabalhamos são vetores, operações matemáticas entre variáveis serão realizadas pareando os elementos dos vetores:

```
> a* b
[1]  1.000000 20.000000 10.200000 12.566371  3.926991  2.207277  5.614011
[8]  3.471070
> a - b
[1]  0.0000000  8.0000000  0.4000000 -0.8584073 -4.2146018 -5.6321206
-6.1979984
[8] -7.5661163
> a^(1/b)
[1] 1.0000000 3.1622777 1.5036946 1.3313354 0.9528356 0.8464817 0.9689709
[8] 0.9008898
>
> sqrt( a )
[1] 1.0000000 3.1622777 1.8439089 1.7724539 0.8862269 0.6065307 0.8955454
[8] 0.6586985
> log( b )
[1] 0.0000000 0.6931472 1.0986123 1.3862944 1.6094379 1.7917595 1.9459101
[8] 2.0794415
```

```
>
```

Comprimento de Vetores e a Função "length"

A função `length` retorna o número de elementos de um objeto:

```
> a <- seq(from=0, to=10, by=2)
> a
[1]  0  2  4  6  8 10
> length(a)
[1] 6
> length(1:20)
[1] 20
> length(rep(1:10,each=10))
[1] 100
>
```

A Regra da Ciclagem

O comprimento é muito importante para as operações vetoriais, pois o R permite operações entre dois vetores de comprimentos diferentes, com a seguinte regra:

Ciclagem de Valores

Operações entre vetores de comprimentos diferentes são realizadas pareando-se seus elementos. Os elementos do vetor mais curto são repetidos sequencialmente até que a operação seja aplicada a todos os elementos do vetor mais longo

Quando o comprimento do vetor maior não é múltiplo do comprimento do maior, o R retorna o resultado e um aviso:

```
> b
 [1] 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1
> c
[1] 1 2 3
> c*b
 [1] 0 0 0 0 0 3 1 2 3 1
Warning message:
In c * b : longer object length
```